FASİKÜL 1

FONKSİYON VE UYGULAMALARI - I

Konu Anlatımı

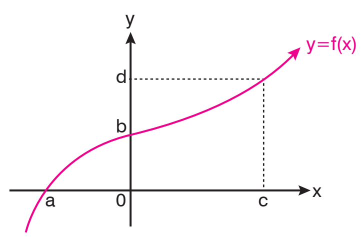
Konu Soruları

Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar ve Fonksiyon Değeri

$y = f(x)$ fonksiyonunda

I. $f(x) = 0$ için bulunan değerler grafiğin x eksenini kestiği noktaların apsisleri ve fonksiyonun sıfırlarıdır.

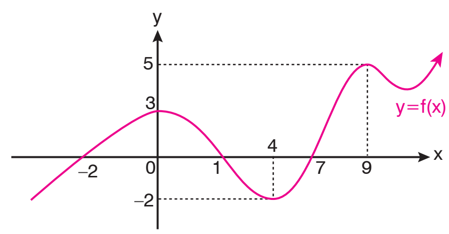
II. $f(0) = y$ eşitliğini sağlayan y değeri ise grafiğin y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır.



Yukarıdaki şekilde,

- $x = a$ değeri fonksiyonun sıfırıdır. $f(a) = 0$ dır. Aynı zamanda $f(x) = 0$ için denklemin çözüm kümesi bulunacağından çözüm kümesi $Ç = \{a\}$ dır.
- $f(0) = b$ için b değeri fonksiyonun y eksenini kestiği noktanın ordinatıdır.
- Fonksiyon grafiğinde verilenlere göre $f(a) = 0$, $f(0) = b$ ve $f(c) = d$ dir.

Örnek - 1



Şekildeki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği için,

I. Fonksiyonun sıfırlarını ve $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

II. Eksenleri kestiği noktaları bulalım.

III. $f(4) + f(0) + f(9)$ değerini bulalım.

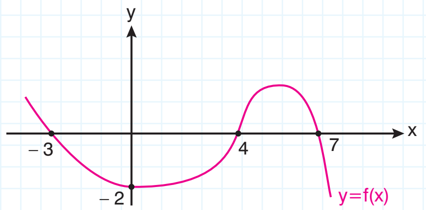
Çözüm

I. Fonksiyonun sıfırları –2, 1 ve 7 dir. Dolayısıyla $f(x) = 0$ ın çözüm kümesi $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan $\{-2, 1, 7\}$ kümesidir.

II. Fonksiyon y eksenini (0,3); x eksenini ise (–2, 0) , (1,0) ve (7,0) noktalarında kesmiştir.

III. $f(4) = -2$, $f(0) = 3$ ve $f(9) = 5$ için toplamları $-2 + 3 + 5 = 6$ dır.

Soru - 1

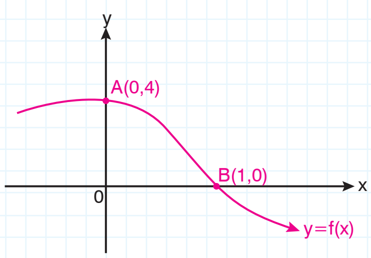


Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı A, y eksenini kestiği noktaların ordinatları toplamı B olmak üzere $\frac{A}{B}$ değerini bulunuz.

Çözüm

C: –4

Soru - 2



Yukarıda verilen y = f(x) grafiği eksenleri A(0,4) ve B(1,0) noktalarında kesmektedir.

$f(x) = (a + 1)x^3 + 2ax^2 + a + b - 2$

olduğuna göre, a değerini bulunuz.

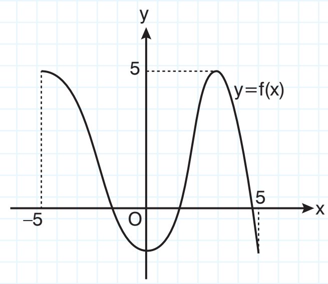
Çözüm

C: $-\frac{5}{3}$

Soru - 3

AYT 2020

Dik koordinat düzleminde [–5, 5] kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.



Bu fonksiyonun tanım kümesinde yer alan birbirinden farklı a, b, c ve d sayıları için

$f(a) = f(b) = 1$

$f(c) = f(d) = 3$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Buna göre a, b, c ve d sayılarının sıralamasıyla ilgili

I. $a < b < c < d$

II. $c < a < b < d$

III. $c < d < a < b$

eşitsizliklerinden hangileri doğru olabilir?

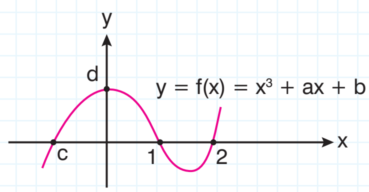
A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm

C: C

Soru - 4



Yukarıda verilen $f(x) = x^3 + ax + b$ grafiğinde verilenlere göre c . d çarpımı kaçtır?

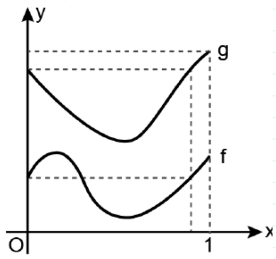
Çözüm

C: –18

Soru - 5

TYT 2022

Dik koordinat düzleminde, [0,1] kapalı aralığında tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



a, b ve c gerçel sayılar olmak üzere,

$0 < a < b < c < 1$

eşitsizliği veriliyor.

$f(a) = f(b) = f(c)$

olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $g(a) < g(b) < g(c)$ B) $g(b) < g(a) < g(c)$

C) $g(b) < g(c) < g(a)$ D) $g(c) < g(a) < g(b)$

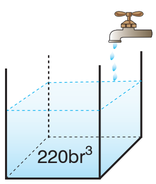
E) $g(c) < g(b) < g(a)$

Çözüm

C: B

Örnek - 2

Bir su deposunun içinde 220 br^3 su varken deponun üzerindeki saatte 50 br^3 su akıtan bir çeşme açılıyor. t. saatte depodaki su miktarı ile ilgili değer tablosu aşağıdaki gibidir.



Saat (t)	0	1	2	3	...
Hacim (br^3)	220	270	320	370	...

Buna göre,

I. Depoda bulunan suyun t saat sonraki hacmini ifade eden t ye bağlı fonksiyonu bulalım.

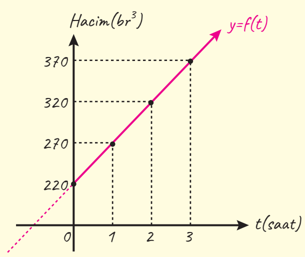
II. Fonksiyonun grafiğini çizelim.

III. 13. saatin sonunda depoda bulunan toplam su miktarını bulalım.

Çözüm

I. $f(t) = 220 + 50t$; fonksiyonu t nin 1 er saat değişimindeki tabloda verilen değerler için sağlanır.

II.

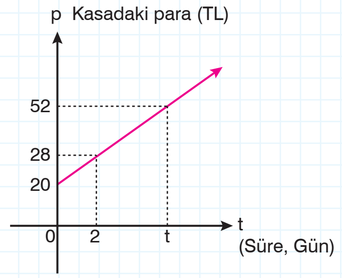


III. $t = 13$ için $f(t) = 220 + 50t$

$f(13) = 220 + 50(13) = 220 + 650 = 870$ br^3 su vardır.

Soru - 6

Kasasında başlangıçta 20 TL'si olan bir satıcı, gün sonunda elde ettiği günlük kârını da kasasına koymaktadır.

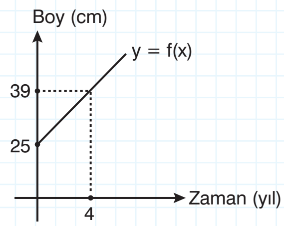


Buna göre, kaç günün sonunda kasasında toplam 52 TL bulunur?

Çözüm

C: 8 gün

Soru - 7



Yukarıdaki doğrusal grafikte, dikildiğinde boyu 25 cm olan bir fidanın her yıl boyunun kaç cm olduğu gösterilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunu yazarak 10. yıl sonunda fidanın boyunun kaç cm olacağını bulunuz.

Çözüm

C: 60

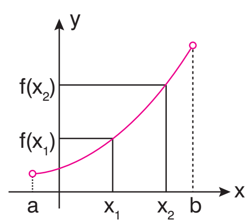
Fonksiyonun Artan ve Azalan Olduğu Aralıklar

- $(a, b) \subset R$ ve $f : R \to R$

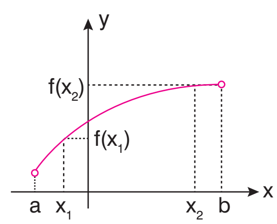
olmak üzere

$\forall x, x_2 \in R$ için

I. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artandır.

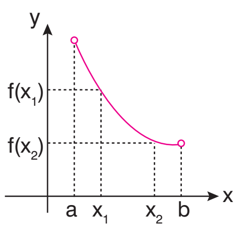


Artan

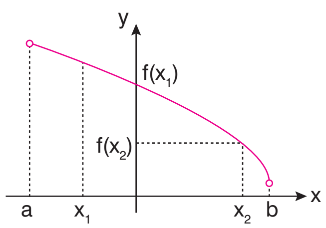


Artan

II. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.

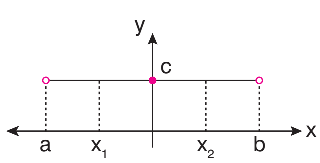


Azalan



Azalan

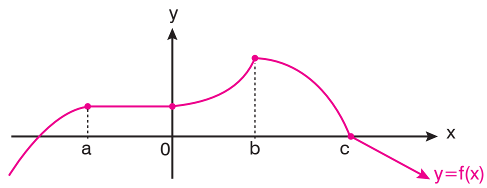
III. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) = f(x_2) = c \in R$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında sabittir.



Sabit

- f(x) fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki bütün x değerleri için $f(x_0) \leq f(x)$ olacak şekilde bir x_0 değeri varsa, fonksiyonunun minimum değeri $f(x_0)$ dır.
- f(x) fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki bütün x değerleri için $f(x_0) \geq f(x)$ olacak şekilde bir x_0 değeri varsa, fonksiyonunun maksimum değeri $f(x_0)$ dır.

Örnek - 3



$f:(-\infty,\infty) \to R$ tanımlı fonksiyon için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

I. $x < a$ için artan fonksiyondur.

II. $a < x < b$ için azalan fonksiyondur.

III. $0 < x < b$ için artan fonksiyondur.

IV. $b < x < c$ için azalan fonksiyondur.

V. $c < x < \infty$ için artan fonksiyondur.

Çözüm

I. Doğrudur. $x < a$ için x değerleri artarken $y = f(x)$ değerleri artmıştır.

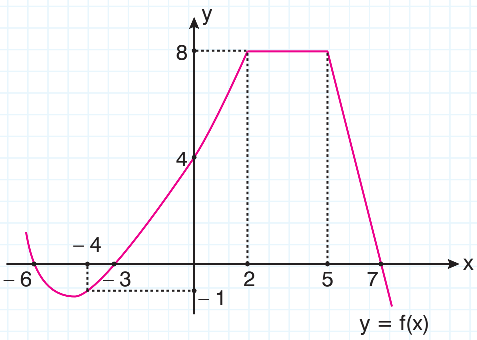
II. Yanlıştır. $a < x < b$ için fonksiyonun sabit fonksiyon olduğu aralık vardır.

III. Doğrudur. $0 < x < b$ için x değerleri artarken $y = f(x)$ değerleri artmıştır.

IV. Doğrudur. $b < x < c$ için x değerleri artarken $y = f(x)$ değerleri azalmıştır.

V. Yanlıştır. $x > c$ veya $c < x < \infty$ için x değerleri artarken $y = f(x)$ değerleri azalmıştır.

Soru - 8



y = f(x) grafiğinde verilenlere göre aşağıdakilerden hangileri daima doğrudur?

I. (2, 5) aralığında artandır.

II. f(– 2) < f(1) dir.

III. (– ∞, – 6) aralığında azalandır.

IV. (– 4, 2) aralığında artandır.

V. (0, 5) aralığında artandır.

Çözüm

C: I. Y
II. D
III. D
IV. D
V. Y

Soru - 9

Aşağıdaki fonksiyonlardan kaç tanesinin $\forall x \in \mathbb{R}$ için (bütün x değerleri için) **daima artan fonksiyon olduklarını bulunuz.**

I. $f(x) = 1 + 2x$

II. $f(x) = 10$

III. $f(x) = -\sqrt{3}$

IV. $f(x) = (x + 2)^2$

V. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Çözüm

C: Yalnız I

NAVİGASYON

- Eğimleri pozitif olan doğrusal fonksiyonlar daima artandır.
- Eğimleri negatif olan doğrusal fonksiyonlar daima azalandır.
- Eğimi 0 olan fonksiyon sabit fonksiyondur.
- y = mx + n doğrusunun eğimi m dir.

Örnek - 4

$f(x) = x - 2$

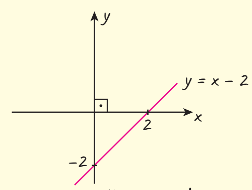
$g(x) = 7 - 2x$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, fonksiyonların artan veya azalan olup olmadıklarını inceleyiniz.

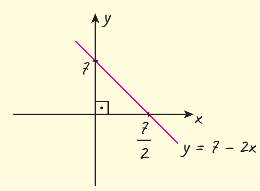
a) f(x) b) g(x) c) 2 . f(x) + g(x) d) fog(x)

Çözüm

a) $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun eğimi x'in katsayısı olan 1'dir. Dolayısıyla eğimi pozitf olduğundan f(x) fonksiyonu daima artan fonksiyondur.



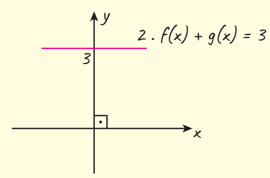
b) $g(x) = 7 - 2x$ fonksiyonunun eğimi –2 olup negatif olduğundan g(x) fonksiyonu daima azalandır.



c) $2 . f(x) + g(x) = 2x - 4 + 7 - 2x$

$= 3$

$2 . f(x) + g(x) = 3$ fonksiyonunun eğimi 0 olup sabit fonksiyondur.

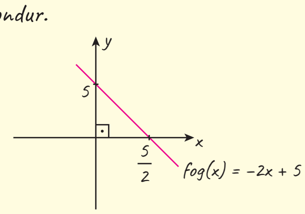


d) $fog(x) = f(g(x))$

$= (7 - 2x) - 2$

$fog(x) = -2x + 5$

$fog(x) = -2x + 5$ fonksiyonunun eğimi –2 olup negatif olduğunda azalan fonksiyondur.



Soru - 10

Reel sayılarda tanımlı,

$f(x) = \frac{x}{2} + 5$ ve

$g(x) = -3x - 7$ fonksiyonlarının

artan veya azalan olup olmadıklarını inceleyiniz.

Çözüm

Fonksiyonun Pozitif ve Negatifliği Olduğu Aralıklar

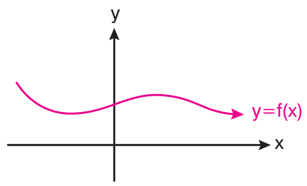
f fonksiyonunun tanımlı olduğu değer veya aralık için;

I. $f(x) > 0$ ise fonksiyon pozitiftir.

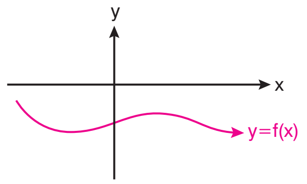
II. $f(x) < 0$ ise fonksiyon negatiftir.

Pratik olarak, koordinat sisteminde çizilen fonksiyon grafiği için;

- x ekseninin altındaki parçalarda fonksiyon negatif
- x ekseninin üstündeki parçalarda fonksiyon pozitiftir.
- x eksenini kestiği noktalar için $f(x) = 0$ dır.

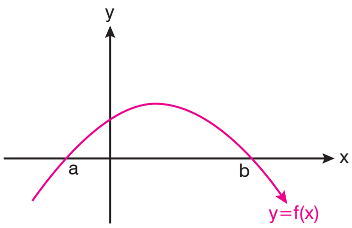


$f(x) > 0$ için f(x) pozitif tanımlıdır.



$f(x) < 0$ için f(x) negatif tanımlıdır.

Örnek - 5



fonksiyonunun işaret durumunu inceleyelim.

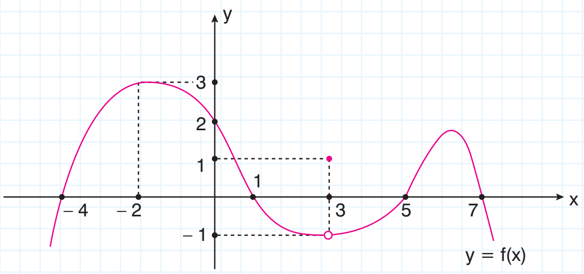
Çözüm

$x < a$ ve $x > b$ için $f(x) < 0$, negatif tanımlıdır.

$a < x < b$ için $f(x) > 0$, pozitif tanımlıdır.

$x = a$ ve $x = b$ için $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ dır.

Soru - 11

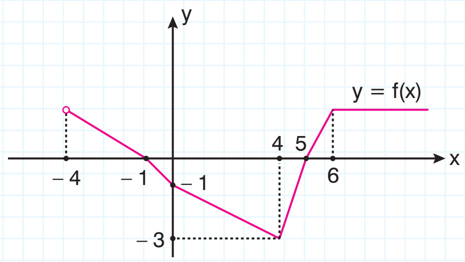


y = f(x) grafiğinde verilenlere göre f(x) fonksiyonunu <u>pozitif yapmayan</u> x tamsayılar toplamı kaçtır?

Çözüm

C: –3

Soru - 12

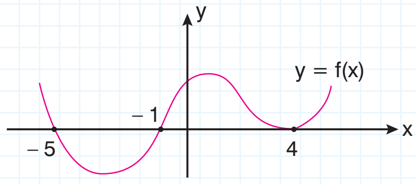


f(x) fonksiyonunun azalan ve pozitif olduğu en geniş aralığı nedir?

Çözüm

C: (–4, –1)

Soru - 13

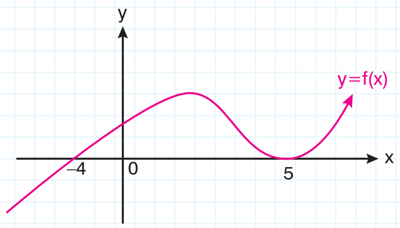


y = f(x) fonksiyonunun grafiğine göre f(x) ≤ 0 koşulunu sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm

C: –11

Soru - 14



Yukarıdaki şekilde verilen y = f(x) grafiği için

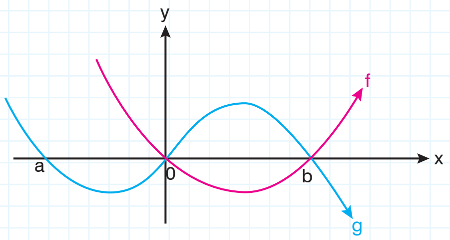
$$x.f(x) \leq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı tamsayıların kümesini bulunuz.

Çözüm

C: {–4, –3, –2, –1, 0, 5}

Soru - 15



Yukarıdaki şekilde verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre

$$f(x).g(x) < 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı tamsayıların kümesini bulunuz.

Çözüm

C: a < x < ∞ – {0,b}

Fonksiyonun Maximum ve Minimum Değerleri

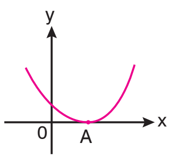
f: A → B tanımlı fonksiyon için, değer kümesindeki (Yani B'de) tanımlı değerlerin en büyüğüne, fonksiyonun maximum değeri, en küçüğüne fonksiyonun minimum değeri denir.

Örneğin; f: A → {–1, 0, 2} değerleri için fonksiyonun alabileceği en büyük değer 2, en küçük değer –1 dir.

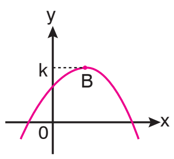
NOT: Maximum değerinin sağlandığı noktaya fonksiyonun maximum noktası, minimum değerinin sağlandığı noktaya fonksiyonun minimum noktası denir.

NOT: Her fonksiyonda maximum veya minimum nokta olmak zorunda değildir.

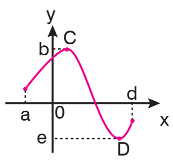
Örneğin;



Şekil I



Şekil II



Şekil III

şekillerindeki maximum ve minimum durumlarını inceleyelim.

- Şekil I de, minimum değer 0 ve A noktası fonksiyonun minimum noktasıdır.

- Şekil II de, maximum değer k ve B noktası fonksiyonun maximum noktasıdır.

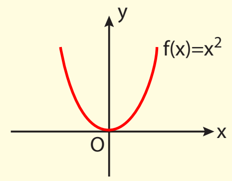
- Şekil III de x∈ (a,d) için maximum değer b, minimum değer e ve C noktası maximum noktası, D noktası minimum noktasıdır.

NOT: $f(x) = ax + b$ şeklindeki doğrusal fonksiyonlarda özel bir tanımlanma yoksa maximum veya minimum değer veya nokta araştırılmaz.

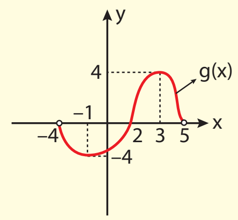
NOT: Sabit fonksiyonlarda maximum veya minimum değer aranmaz.

Örnek - 6

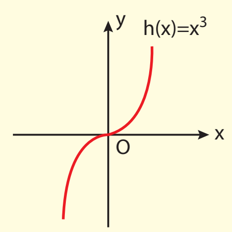
I. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunun minimum değeri $f(0) = 0$ dır.



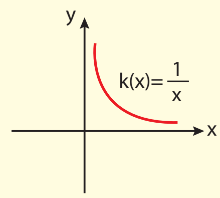
II. $(-4, 5) \to \mathbb{R}$ ye tanımlı g(x) fonksiyonu için maksimum değer $g(3) = 4$, minimum değer $g(-1) = -4$ tür.



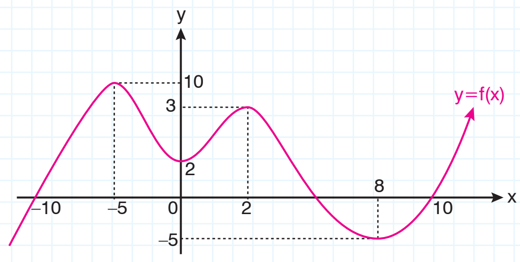
III. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $h(x) = x^3$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değeri yoktur.



IV. $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tanımlı $k(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değeri yoktur.



Soru - 16



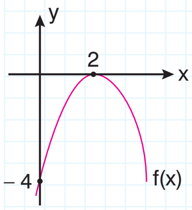
y = f(x) fonksiyonunun x∈(–10,10) aralığındaki en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı ile bu noktaların apsisleri toplamının çarpımını bulunuz.

Çözüm

C: 15

Soru - 17

f : R → R



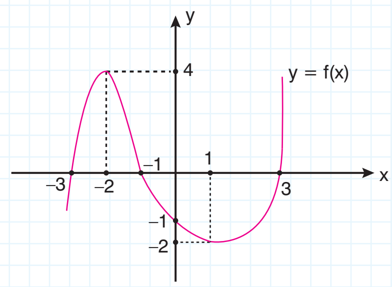
$f(x) = -(x-2)^2$

fonksiyonunun max. ve min. değerlerini bulunuz.

Çözüm

C: max. = 0
min. değeri yoktur.

Soru - 18



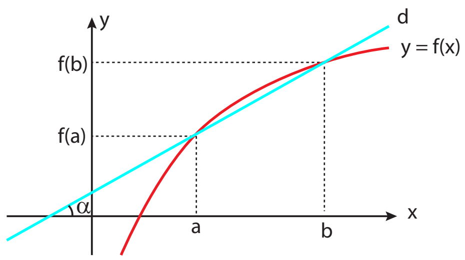
y = f(x) fonksiyonunun grafiğinde verilenlere göre f(x)'in;

[– 3, 3] aralığındaki en büyük değeri en küçük değerinden kaç fazladır?

Çözüm

C: 6

Bir Aralıkta Ortalama Değişim (Oranı)



y = f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki ortalama değişim hızı, fonksiyonu $\big(a, f(a)\big)$, $\big(b, f(b)\big)$ noktalarında kesen d doğrusunun eğimine eşittir. Bu doğrunun eğimi, yani f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki ortalama değişim hızı,

$$\tan\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ile bulunabilir.

Örnek - 7

$f(x) = 2x^3$ fonksiyonunun [–3, –1] aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

[–3, –1] aralığında f fonksiyonu için değişim hızı,

$$\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)} = \frac{2.(-1)^3 - 2.(-3)^3}{-1+3}$$

$$= \frac{-2+54}{2} = 26 \text{ olur.}$$

NAVİGASYON

- Bir doğrunun eğimi, f fonksiyonunun [a, b] aralığındaki ortalama değişim hızına eşittir.
- y = mx + n doğrusal fonksiyonların ortalama değişim hızı her aralıkta aynı olup fonksiyonun eğimine eşittir. Yani m değerine eşittir.
- Doğrusal olmayan fonksiyonların ortalama değişim hızı (oranı) farklı aralıklarda farklı değerler alabilir.

Soru - 19

f: R → R

$f(x) = x^3 + x^2 + 6$ fonksiyonunun;

a) [– 1, 1] aralığındaki ortalama değişim hızını (oranını) bulunuz.

b) [– 2, 3] aralığındaki ortalama değişim hızını (oranını) bulunuz.

Çözüm

C: a) 1
b) 8

Örnek - 8

f(x) = 4x – 1 fonksiyonunun [–1, 5] aralığındaki değişim hızını bulunuz.

Çözüm

f(x) doğrusal fonksiyon olduğu için bütün aralıklarda değişim hızı aynı olup eğimine eşittir. Yani [–1, 5] aralığındaki değişim hızı 4 dür.

Soru - 20

$f(x) = x^3 + kx + 5$ fonksiyonunun [– 1, 2] aralığındaki ortalama değişim oranı (hızı) 1 olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm

C: –2

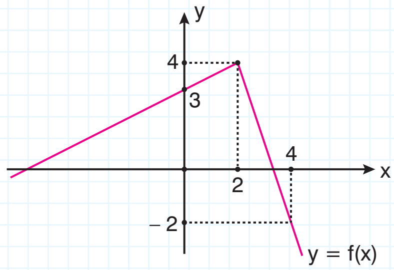
Soru - 21

f(x) = 2 – 3x doğrusal fonksiyonunun [–2, –1], [0, 3] ve [–3, 5] aralıklarındaki değişim hızlarını hesaplayınız.

Çözüm

C: [–2, –1] aralığında değişim hızı, –3
[0, 3] aralığında değişim hızı, –3
[–3, 5] aralığında değişim hızı, –3

Soru - 22



y = f(x) fonksiyon grafiğinde verilenlere göre f fonksiyonunun,

a) [– 1, 0] aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

b) [0, 2] aralığındaki ortalama değişim hızını (oranını) bulunuz.

c) [2, 3] aralığındaki ortalama değişim hızını (oranını) bulunuz.

Çözüm

C: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) –3

Soru - 23

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 8 & x \leq 0 \quad \text{ise} \\ bx + c & x \geq 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

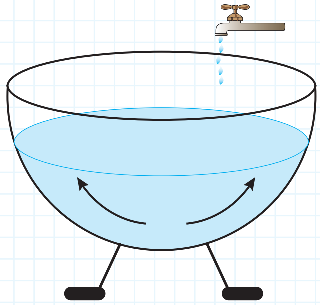
Yukarıda denklemi verilen f(x) fonksiyonunun [–3, –1] aralığındaki ortalama değişim oranı 2, [3, 5] aralığındaki değişim oranı –2 dir.

Buna göre a . b çarpımını bulunuz.

Çözüm

C: –12

Soru - 24



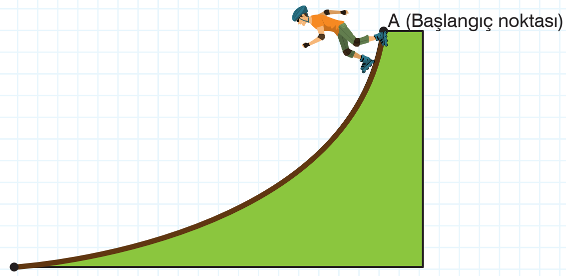
Yukarıdaki şekilde; parabolik görünümlü olan kabın üstündeki musluktan akan suyun, t dakikada kapta doldurduğu hacmi; $f(t) = \frac{t^2}{8} + 16$ bağıntısı ile ifade edilmiştir.

Buna göre, kap tamamen boşken açılan musluktan akan suyun, 4. dakika başından 8. dakikanın sonuna kadar olan ortalama değişim hızı kaçtır?

Çözüm

C: 1,5

Soru - 25



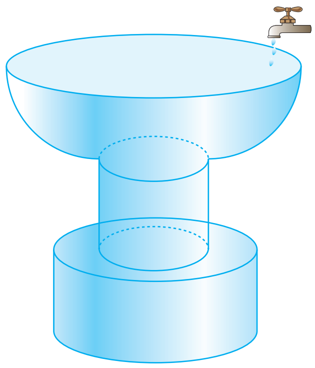
Yukarıdaki şekilde, tekerlekli paten alanının; t saniye değişkenine bağlı eğrisel bağıntısı $f(t) = 2^t + 1$ fonksiyonudur.

A, başlangıç noktasından B noktasına doğru harekete başlayan patencinin 2. saniyenin başından 5. saniyenin sonuna kadar geçen süredeki ortalama değişim hızı kaçtır?

Çözüm

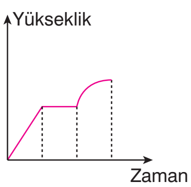
C: $\frac{28}{3}$

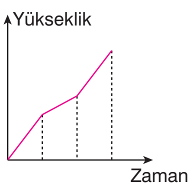
Örnek - 9

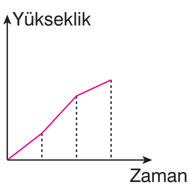


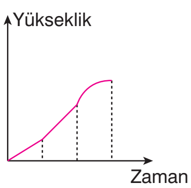
Yukarıdaki şekilde alt tarafı geniş, orta kısmı dar silindir ve üst tarafı yarım küre şeklindeki boş bir kaba sabit hızla su doldurulmaktadır.

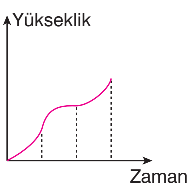
Buna göre, kaptaki suyun yüksekliğinin zamana bağlı değişim grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A)


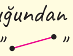
B)


C)


D)


E)


Çözüm

Alt kısımdaki silindir daha geniş olduğundan zamanı büyük yüksekliği küçük olan doğrusal bir hareket olur. "  *"*

Orta kısımdaki silindir dar olduğundan az zamanda hızlı yükselen doğrusal bir hareket olur. "  *"*

Üst kısım yarım küre olduğu için eğrisel bir hareket olur. "  *"*

Buna göre grafiğimiz, "  *" şeklindedir.*

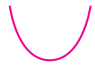
Cevap: D

II. Dereceden Fonksiyonların Grafiği (Parabol)

a, b, c, $\in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna ikinci dereceden bir bilinmeyenli fonksiyon denir.

Bu fonksiyonun grafiğine parabol denir.



$a > 0$ ise

$a < 0$ ise

Örnek - 10

$f(x) = (a - 5)x^3 + x^{a-b+2} + c$

fonksiyonun grafiği parabol olduğuna göre a, b ve c değerlerini bulalım.

Çözüm

f(x) parabol olduğuna göre, x^3 lü terim olmamalı, ancak x^2 li terim bulunmalıdır.

O halde; $a - 5 = 0$ *ve* $a = 5$ *tir.*

$a - b + 2 = 2$ *olmalıdır.*

$5 - b + 2 = 2$

$b = 5$ *olacaktır.*

c değerinin önemi yoktur.

Soru - 26

$f(x) = (m + 2)\,x^3 + (x + 1)\,x^2 + x + m$

fonksiyonunun grafiği bir paraboldur.

Buna göre f(4) kaçtır?

Çözüm

C: 17

Parabolün eksenleri kestiği noktalar

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünde,

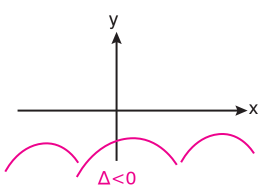
$x = 0$ ise $f(0) = c$ olup y eksenini $(0, c)$ noktasında keser.

$y = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ olur.

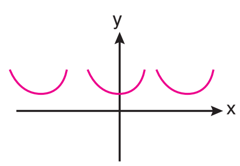
I. $\Delta < 0$ ise parabol x ekseninin kesmez. ($a > 0$ ise parabol x ekseninin yukarısında, $a < 0$ ise parabol x ekseninin altındadır.)

$\Delta < 0$ şartı parabolik fonksiyonlarda, fonksiyonun daima negatiflik veya daima pozitiflik şartıdır.

- Parabol daima negatif ise $\Delta < 0$, $a < 0$ olmalıdır.
- Parabol daima pozitif ise $\Delta < 0$, $a > 0$ olmalıdır.



$\Delta<0$
$a<0$
Daima negatiflik şartı

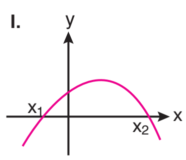


$\Delta<0$
$a>0$
Daima pozitiflik şartı

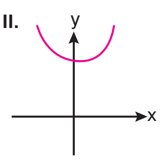
II. $\Delta = 0$ ise parabol x eksenine teğettir.

III. $\Delta > 0$ ise parabol x eksenini iki farklı noktada keser.

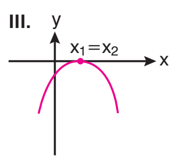
Sonuç olarak, yukarıda verilen Δ değerinin işaretine göre, parabol grafikleri aşağıdaki gibi olacaktır.



$\Delta>0$ için iki farklı x_1 ve x_2 kökü vardır. (Ox'i keser)



$\Delta<0$ için kökü yoktur. (Ox'i kesmez)



$\Delta=0$ için birbirine eşit iki kök vardır. (Ox'e teğet)

Soru - 27

$f(x) = x^2 + 2x - 8$ parabolünün eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm

C: $(2, 0)$, $(-4, 0)$ ve $(0, -8)$

NAVİGASYON

➤ $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün y eksenini kestiği noktanın ordinatı c'dir.

Örnek - 11

$f(x) = -mx^2 - x + 4$

parabolü x eksenini kesmediğine göre, m değer aralığını bulalım.

Çözüm

Parabol x eksenini kesmediğine göre Δ : Diskriminant değeri negatif $\Delta < 0$ olmalıdır.

$b^2 - 4ac < 0$, $(-1)^2 - 4(-m).4 < 0$

$1 + 16m < 0$

$m < -\frac{1}{16}$ *olacaktır.*

Soru - 28

$f(x) = x^2 - 4x + m + 1$ parabolü x eksenini iki farklı noktada kestiğine göre m'nin alabileceği en büyük tamsayı değeri kaçtır?

Çözüm

C: 2

Soru - 29

$m \in R^+$ olmak üzere

$f(x) = x^2 + 2x - m + 6$ parabolü

x eksenini kesmediğine göre m'nin alabileceği tamsayıların toplamını bulunuz.

Çözüm

C: 10

Soru - 30

$f(x) = x^2 - px + 3p - 4$

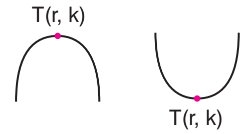
parabolü x eksenine teğet olduğuna göre, p'nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

Çözüm

C: 12

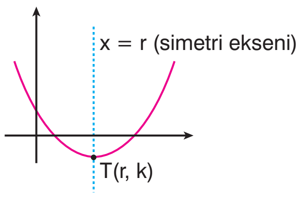
Parabolün Tepe noktası

f: R → R ve $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün en alt ya da en üst noktasına tepe noktası denir. Tepe noktasının koordinatları genelde T(r, k) ile gösterilir.



- $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere tepe noktasının apsisi (r) kökler toplamının yarısıdır.

  Yani; $r = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$ dır.
- r değeri fonksiyonda x yerine yazılarak tepe noktasının ordinatı (k) bulunur.
- T(r, k) tepe noktası için $r = \dfrac{-b}{2a}$ ve $k = f(r) = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ dır.
- Tepe noktasının apsisinden geçen x = r doğrusuna simetri ekseni denir.



Örnek - 12

$f(x) = -x^2 + 6x + 7$

parabolünün tepe noktasının koordinatlarını bulalım ve koordinat düzleminde gösterelim.

Çözüm

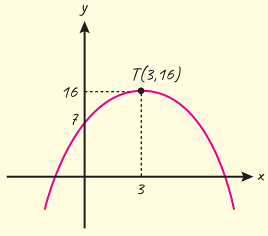
Tepe noktası

$T(r,k) = T\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$ *şeklinde yazılabilir.*

O halde apsis $r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2(-1)} = 3$

Ordinat $k = f(r) = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ *için bulunur.*

$k = f(3) = -9 + 18 + 7 = 16$ *olur.*



Ayrıca x = 0 için y = 7 olur.

Örnek - 13

$f(x) = (x + 2)^2$

parabolünün tepe noktasını bulup koordinat düzleminde gösteriniz.

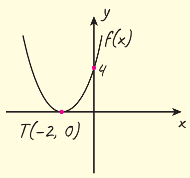
Çözüm

$y = (x + 2)^2$

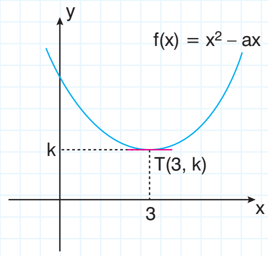
$= x^2 + 4x + 4$

$T(r, k)$ için

$$\left.\begin{aligned} r &= -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ k &= f(r) \Rightarrow f(-2) = (-2 + 2) \\ &= 0 \end{aligned}\right\} T(-2, 0) \text{ olur.}$$



Soru - 32



$f(x) = y = x^2 - ax + a + 5$ parabolünün tepe noktası $T(3, k)$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

Çözüm

C: 2

Soru - 31

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

fonksiyonunun tepe noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

C: $T(2, -3)$

Soru - 33

$f(x) = (m - 1)x^2 + (m + 3)x + m$

parabolünün simetri ekseni $x = 2$ doğrusu olduğuna göre m kaçtır?

Çözüm

C: $\frac{1}{5}$

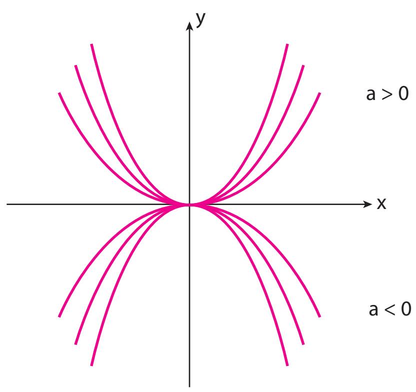
NAVİGASYON

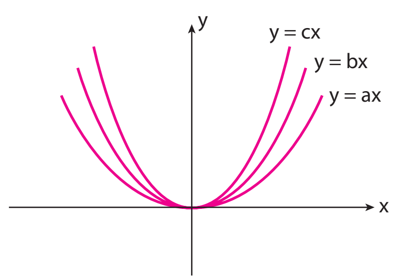
$f(x) = ax^2$ parabollerinin kolları "x^2 nin katsayısı a'nın mutlak değeri büyüdükçe" y eksenine doğru kapanır.

Örneğin;

$y = 5x^2$ nin kolları $y = x^2$ nin kollarından y eksenine daha yakındır.

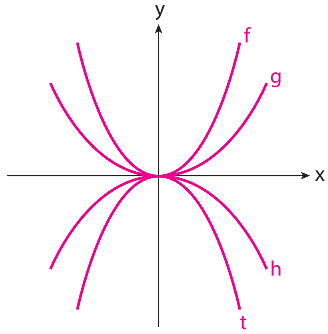
$y = ax^2$ şeklindeki fonksiyonların grafiği





$a < b < c$ dir.

Örnek - 14



Yukarıdaki şekilde;

$f(x) = ax^2$,

$g(x) = bx^2$,

$h(x) = cx^2$ ve

$t(x) = dx^2$ grafikleri verilmiştir.

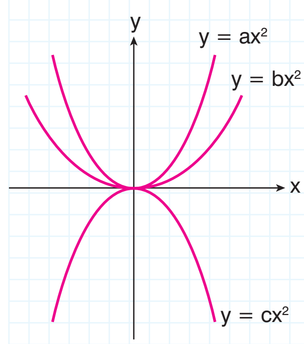
Buna göre; a, b, c ve d nin sıralamasını yapalım.

Çözüm

Verilen bilgi açısından $a > b$ dir. Ancak $|d| > |c|$ olduğundan, c ve d nin negatif değer almasından dolayı $d < c$ olacaktır.

Buna göre; a, b, c ve d nin sıralaması $d < c < b < a$ olacaktır.

Soru - 34



Yandaki parabol grafiklerine göre,

a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

C: $c < b < a$

NAVİGASYON

y = f(x) parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde ise parabolün genel denklemi

$y = ax^2 + c$ dir.

Yani x li terim olamaz.

y = f(x) parabolünün tepe noktası

x ekseni üzerinde ise parabolün

denklemi $y = a \cdot (x \pm r)^2$ şeklindedir.

Örnek - 15

$f(x) = -2x^2 + 8$

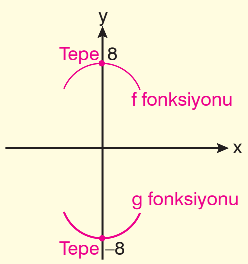
$g(x) = 10x^2 - 8$

parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm

f(x)'in tepe noktası; (0, 8)

g(x)'in tepe noktası, (0, –8)



İki tepe noktası arasındaki uzaklık 16 br dir.

Soru - 35

f: R → R

$f(x) = 3x^2 + (a + b - 2)x + 2a + 2b + 3$

parabolünün tepe noktası y ekseni üzerinde olduğuna göre f(– 1) kaçtır?

Çözüm

C: 10

Soru - 36

$f(x) = -x^2 + 2m$

$g(x) = 3x^2 - m$

parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklık 15 br olduğuna göre f(1) + g(2) kaçtır?

Çözüm

C: 16

Soru - 37

$p > 0$ olmak üzere

$f(x) = -x^2 + p$

$g(x) = -(x - 5)^2$

parabollerinin tepe noktaları arasındaki uzaklık 13 olduğuna göre, p değerini bulunuz.

Çözüm

C: 12

Soru - 38

f: R → R

$f(x) = x^2 - 3x + a$

parabolünün tepe noktası x ekseni üzerinde olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm

C: $\frac{9}{4}$

Parabolün Grafiğini Çizme

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafik çizimi için aşağıdaki işlemler uygulanır.

- Parabolün kollarının yönü bulunur.

  $a > 0$ için kollar yukarıya

  $a < 0$ için kollar aşağıya doğrudur.

- Parabolün eksenleri kestiği noktalar bulunur.
- Parabolün tepe noktası bulunur.

  Bulunan noktalar koordinat düzleminde gösterilip, bu noktalardan geçecek biçimde grafik çizilir.

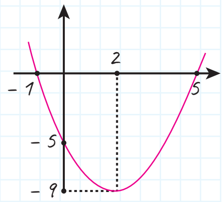
Soru - 39

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm

C:



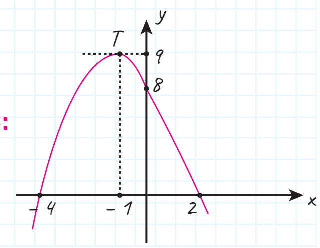
Soru - 40

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$

parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm

C:



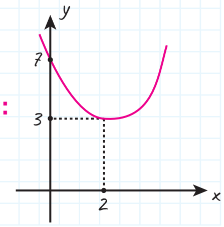
Soru - 41

$f(x) = x^2 - 4x + 7$

parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm

C:



Soru - 42

Aşağıdaki parabollerin grafiklerini çiziniz.

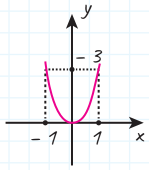
a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = -x^2 + 1$

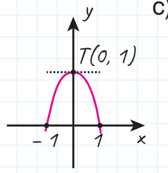
c) $f(x) = x^2 + 4$

Çözüm

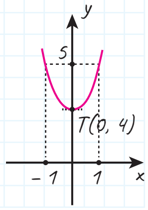
C: a)



b)



c)



Grafiği Verilen Parabolün Denkleminin Yazılması

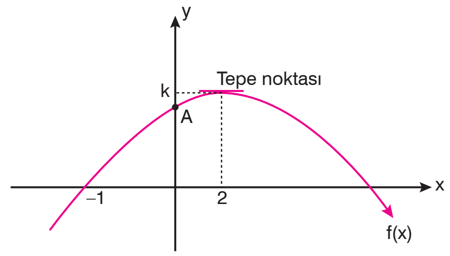
Bir parabolün denklemini yazabilmek için, üzerindeki birbirinden farklı en az iki noktanın bilinmesi gerekir.

- x eksenini x_1 ve x_2 noktalarından kesen parabolün denklemi: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$
- Tepe noktası T(r, k) olan parabolün denklemi: $y = a(x-r)^2 + k$ ile bulunabilir.

NAVİGASYON

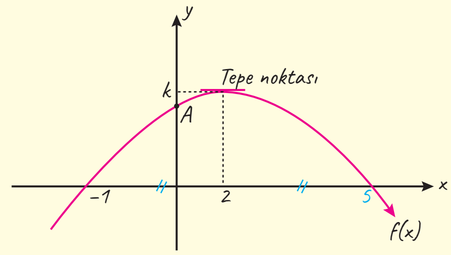
➤ Parabolün denkleminin kurulması için takip edilen iki farklı yolda da x^2 nin katsayısı olan a değerini bulmak için parabol üzerinde kullanılmayan farklı bir nokta sağlatılır. (Yani, x yerine noktanın apsisi, y yerine noktanın ordinatı yazılarak eşitlik sağlatılır.)

Örnek - 16



Yukarıdaki şekilde verilen parabolün denklemini yazalım.

Çözüm



Parabolün tepe noktasının apsisi 2 için simetrik durumdan dolayı parabolün x eksenini kestiği diğer kök 5 olacaktır.

O halde;

$y = a(x - x_1).(x - x_2)$

$y = a(x + 1).(x - 5)$

eşitliğinde parabol üzerindeki (0,15) noktasını sağlatalım.

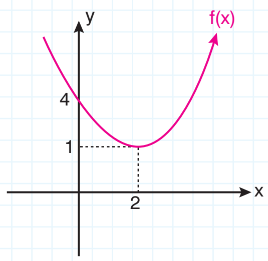
$15 = a(1).(-5)$

Buradan $a = -3$ *olur.*

Buradan, parabol denklemi

$y = -3.(x+1)(x - 5)$ *olacaktır.*

Soru - 43

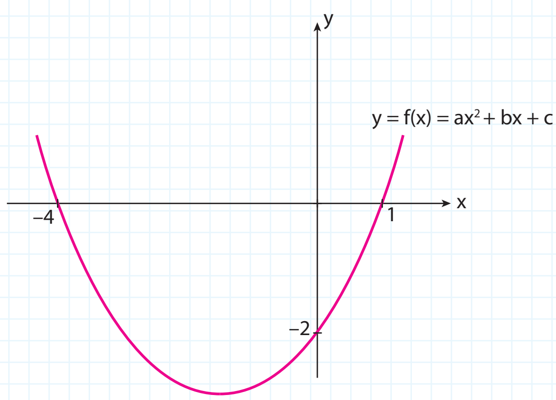


Yukarıda grafiği verilen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

C: $\frac{3}{4}(x-2)^2 + 1$

Soru - 44

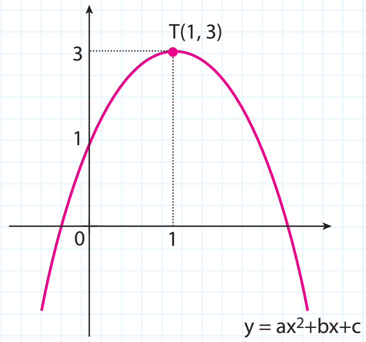


Yukarıda grafiği verilen fonksiyonun denklemini yazınız.

Çözüm

C: $\frac{1}{2}(x-1)(x+4)$

Soru - 45



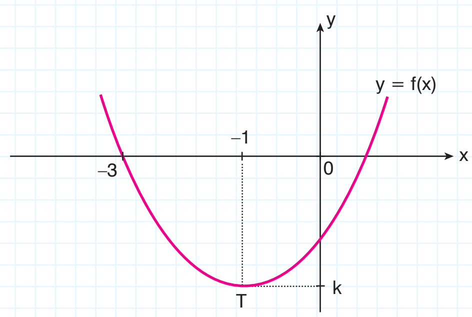
Yukarıda grafiği verilen parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

C: $-2(x-1)^2 + 3$

Soru - 46

$y = f(x)$ parabolünün tepe noktası $T(-1, k)$ dır.



Şekilde verilenlere göre, parabolün x eksenini pozitif bölgede kestiği noktanın apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm

C: E